Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 04.11.2011 vor der Plenarübung

KREUZPRODUKT, DREHUNGEN & MATRIZEN

Mit diesen Aufgaben lernen Sie weitere Konzepte kennen, bei denen Vektoren und deren Abbildungen eine wichtige Rolle spielen.

[H9] *Matrizen* **[$1+1+1=3$ Punkte]**

Matrizen beschreiben linear Abbildungen von Vektoren. Wir wollen hier ein erstes Beispiel studieren.

(a) Multiplizieren Sie Matrizen von der Form

$$r\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass das Ergebnis wieder von dieser Form ist.

(b) Für welches r und welches φ sind die Quadrate solcher Matrizen

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ?$$

(c) Welche linearen Abbildungen werden durch solche Matrizen wie in (a) beschrieben?

[H10] *Drehungen* **[$1+1+1+1=4$ Punkte]**

Untersuchen Sie eine lineare Transformation D, die die Standardbasis $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ eines dreidimensionalen Raumes zyklisch vertauscht.

(a) Schreiben Sie die Komponenten von $\vec{a}\,' = D(\vec{a})$ als Produkt einer Matrix D mit den Komponenten von $\vec{a}$.

(b) Zeigen Sie, dass D eine Drehung ist, also Längen unverändert lässt.

(c) Bestimmen Sie einen normierten Vektor $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, den D nicht ändert, $D(\vec{n}) = \vec{n}$.

(d) Geben Sie einen zur Drehachse senkrechten Vektor $\vec{b}$ und sein Transformiertes $\vec{b}\,' = D(\vec{b})$ an. Berechnen Sie mit dem Skalarprodukt $\vec{b}\,' \cdot \vec{b}$ den Drehwinkel.

[H11] *Kreuzprodukt* **[$2+1=3$ Punkte]**

Zwei kleine Aufgaben mit Kreuzprodukten:

(a) Zeigen Sie $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$, indem Sie die Komponmenten des Kreuzproduktes durch den ε-Tensor ausdrücken.

(b) Welche geometrische Bedeutung hat der Vektor $-\vec{e}\times(\vec{e}\times\vec{a})$, wenn $\vec{e}$ ein Einheitsvektor ist?

[H12] *Lorentzkraft* **[2 Punkte]**

Ein Elektron mit Ladung q bewege sich geradlinig gleichförmig, obwohl es ein konstantes elektrisches Feld $\vec{E} = (E, 0, 0)$ und ein konstantes Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)$ durchfliegt. Auf das Elektron wirkt also die Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$. Was kann man nun über die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Elektrons aussagen?

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an!